Exercice :

Soit (u_n) la suite définie sur *IN* par : $\begin{cases} u_0 \in]0,1[\cup]1,+\infty[\\ u_{n+1} = u_n - u_n^2 \ , \quad \text{pour tout } n \in \text{IN} \end{cases}$.

1°) a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

b) Démontrer que **si** la suite (u_n) converge **alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2°) On suppose dans cette question que $0 < u_0 < 1$.

a) Montrer que pour tout $n \in IN$, $0 < u_n < 1$.

b) En déduire que (u_n) est convergente.

c) On pose pour tout $n \in IN$, $T_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k^2$, Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$.

Dans la suite, on pose que $u_0 > 1$

3°) a) Vérifier que $u_1 < 0$.

b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in IN^*$, $u_n \le u_1$.

c) En déduire que la suite (u_n) n'est pas minorée, et déterminer sa limite.

d) On pose pour tout $n \in IN^*$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{1-u_k}$.

Vérifier que pour tout $k \in IN$, $\dfrac{1}{1-u_k} = \dfrac{1}{u_{k+1}} - \dfrac{1}{u_k}$ et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.